নবম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

MAIN TOPIC

- Trigonometry শব্দটি গ্রিক Tri অর্থ তিন, gon অর্থ ধার ও metron অর্থ পরিমাপ। মূলত ত্রিকোণমিতি সমকোণী ত্রিভুজের বাহু ও কোণের মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ে আলোচনা করা হয়।

- মিশর ও ব্যাবিলনীয় সভ্যতায় ত্রিকোণমিতি ব্যবহারের নির্দেশনা।

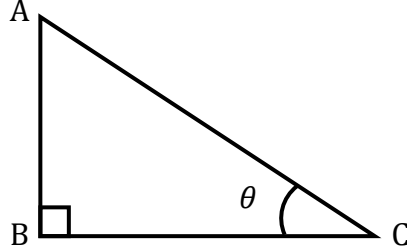
সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর নামকরণ :

আমরা জানি , সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো অতিভুজ, ভুমি ও লম্ব। ত্রিভুজের আনুভূমিক অবস্থানের জন্য এ নামসমূহ সার্থক। আবার সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের যেকোনো একটি সাপেক্ষে অবস্থানের প্রেক্ষিতে ও বাহুগুলোর নামকরণ করা হয়। যথা :

- **অতিভূজ :** সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে অতিভূজ বলা হয়। সমকোণী ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুই অতিভূজ।

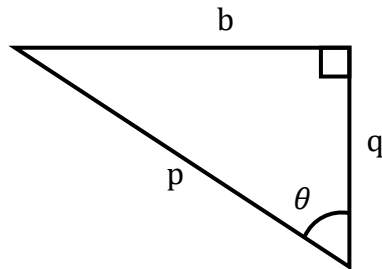
- **বিপরীত বাহু :** সমকোণী ত্রিভুজের প্রদত্ত সূক্ষ্মকোণের সরাসরি বিপরীত দিকের বাহুকে বিপরীত বাহু বলে। অর্থাৎ, θ এর বিপরীত বাহুকে বিপরীত বাহু বলা হয়। এই বিপরীত বাহুকে লম্ব বলে।

- **সন্নিহিত বাহু :** সমকোণী ত্রিভুজের প্রদত্ত সূক্ষ্মকোণ সংলগ্ন বাহুকে সন্নিহিত বাহু বলে। এ সন্নিহিত বাহুকে ভূমি বলা হয়। এই বিপরীত বাহুকে লম্ব বলে।

প্রদত্ত কোণ সৃষ্টিকারী একটি রেখাংশ।

এখানে, $\triangle ABC$ এ $\angle ABC = 90°$ এক সমকোণ।

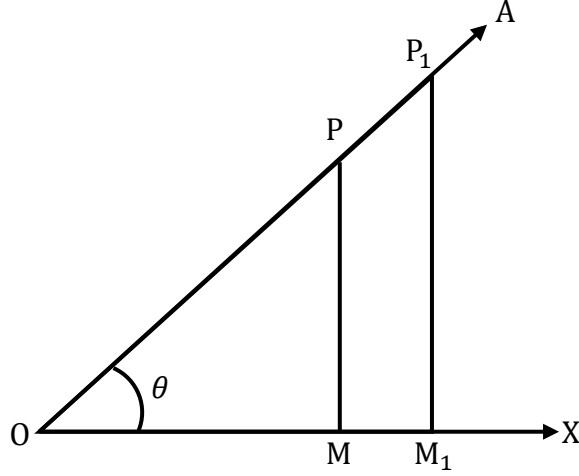
$\therefore$ সমকোণের বিপরীত বাহু AC ; অর্থাৎ অতিভুজ।

$\therefore$ সুক্ষ্মকোণ $\angle ACB$ এর বিপরীত বাহু AB ; অর্থাৎ লম্ব/বিপরীত বাহু।

$\therefore$ সুক্ষ্মকোণ $\angle ACB$ সংলগ্ন বাহু BC ; অর্থাৎ ভূমি/সন্নিহিত বাহু।

এখানে,

অতিভূজ p

বিপরীত বাহু b

সন্নিহিত বাহু q

মনে করি, $\angle XOA$ = সুক্ষ্মকোণ এবং OX এর উপর যথাক্রমে PM ও PM1 লম্ব। এখন, $\triangle POM$ ও $\triangle P1OM$ 1 এ

$\angle PMO = \angle P_1M_1O$ [যেহেতু লম্ব অর্থাৎ সমকোণ]

$\angle POM = \angle P_1OM_1$ [সাধারণ বেস]

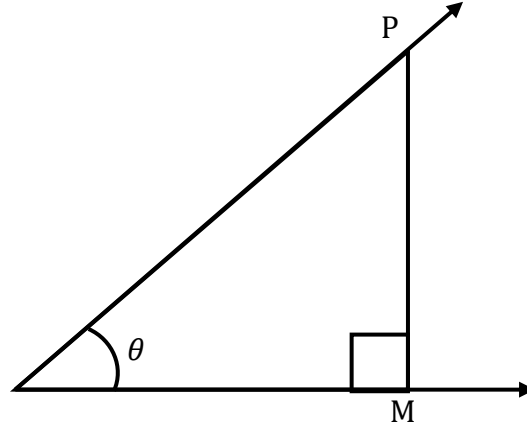
অবশিষ্ট $\angle MPO$ = অবশিষ্ট $\angle M_1P_1O$

$\triangle POM$ ও $\triangle 1POM1$ সদৃশকোণী তথা সদৃশ। অর্থাৎ,

$$\frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OP}{OP_1} \text{ বা } \frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1}$$

$$\frac{OM}{OM1} = \frac{OP}{OP_1} \text{ বা } \frac{OM}{OP} = \frac{OM_1}{OP_1}$$

$$\frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OM}{OM_1} \text{ বা } \frac{PM}{OM} = \frac{P_1M_1}{OM_1}$$

অর্থাৎ, অনুপাতসমূহের প্রত্যেকটি ধ্রুবক, একে ত্রিকোণমিতি অনুপাত বলে।

❑ সমকোণী ত্রিভুজের সুক্ষ্মকোণ (θ) এর ৬ টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত পাওয়া যায়। যথা -

i) $sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভূজ}} = \frac{PM}{OM}$

ii) $\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভূজ}} = \frac{OM}{OP}$

iii) $\tan\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{PM}{OM}$

iv) $\cot\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \frac{OM}{PM}$

v) $\sec\theta = \frac{\text{অতিভূজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{OP}{OM}$

vi) $cosec\theta = \frac{\text{অতিভূজ}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \frac{OM}{PM}$

এখানে পাওয়া যায়

$sin\theta = \frac{1}{cos\theta}$

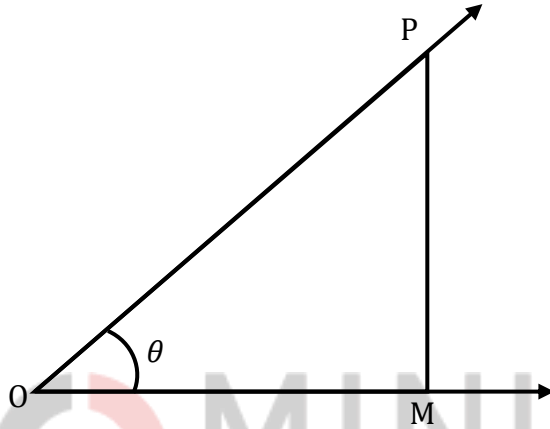
$\cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$

$\tan\theta = \frac{1}{cot\theta}$

আবার,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

এখানে,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = (\frac{PM}{OP})^2 + (\frac{OM}{OP})^2$$

$$= \frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2}$$

$$= \frac{PM^2+OM^2}{OP^2}$$

$$= \frac{OP^2}{OP^2}$$

$$= 1$$

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$sec^2\theta = (\frac{OP}{OM})^2$

$= \frac{OM^2+PM^2}{OM^2}$ [OP সমকোণী $\triangle POM$ এর অতিভূজ বলে।]

$= \frac{OM^2}{OM^2} + \frac{PM^2}{OM^2}$

$= 1 + (\frac{PM}{OM})^2$

$= 1 + tan^2\theta$

$cosec^2\theta = (cosec)^2 = (\frac{OP}{OM})^2$

$= \frac{OP^2}{OM^2}$

$= \frac{PM^2+OM^2}{PM^2}$ [OP সমকোণী $\triangle POM$ এর অতিভূজ বলে।]

$= \frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2}$

$= 1 + (\frac{OM}{PM})^2$

$= 1 + (cot)^2$

$= 1 + cot^2\theta$

30°, 45°, ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :

30° ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :

মনে করি, $\angle xoz$ = 30° এবং OZ বাহুতে p একটি বিন্দু। pm⊥ox আঁকি এবং pm কে Q পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন MQ = PM হয়। O,Q যোগ করে Z পর্যন্ত বর্ধিত করি। এখন,

$\triangle POM$ ও $\triangle QOM$ এর মধ্যে $PM = QM$

OM সাধারণ বাহু এবং

অন্তর্ভুক্ত $\angle PMO$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle QMO = 90°$

$\therefore \triangle POM \cong \triangle QOM$

অতএব, $\angle QOM = \angle POM = 30°$

এবং, $\angle OQM = \angle OPM = 60°$

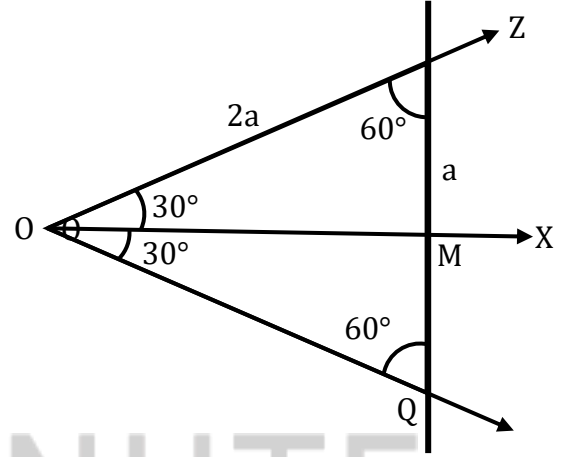
আবার, $\angle POQ = \angle POM + \angle QOM = 30° + 30° = 60°$

$\therefore$ $\triangle OPQ$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

যদি OP = 2a হয়, তবে PM = $\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}OP$ = a [যেহেতু একটি $\triangle OPQ$ সমবাহু ত্রিভুজ।]

সমকোণী $\triangle OPM$ হতে পাই,

$$OM = \sqrt{OP^2 - PM^2}$$

$$= \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

Type-1

Model Example:

(ক) $\frac{\pi}{6}$ (30°) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহ :

পাশের চিত্রে, r = 2a হলে,

y= a এবং x = $\sqrt{3}a$ এবং $\angle POB = \frac{\pi}{6}$

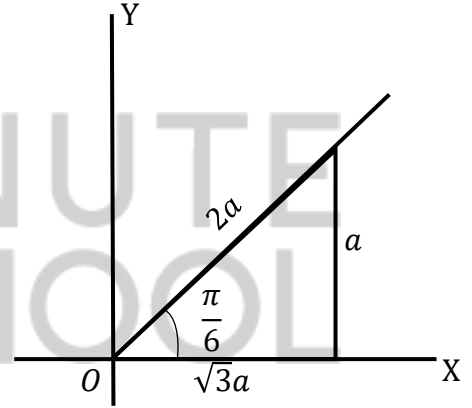
$\therefore \sin\frac{\pi}{6} = \frac{y}{r} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\therefore \cos\frac{\pi}{6} = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \tan\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \cot\frac{\pi}{6} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$

$\therefore \sec\frac{\pi}{6} = \frac{r}{x} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore cosec\frac{\pi}{6} = \frac{r}{y} = \frac{2a}{a} = 2$

Model Example:

(খ) $\frac{\pi}{4}$ (45°) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহ :

পাশের চিত্রে, r = $\sqrt{2}a$, x = a, y = a এবং $\angle POB = \frac{\pi}{4}$

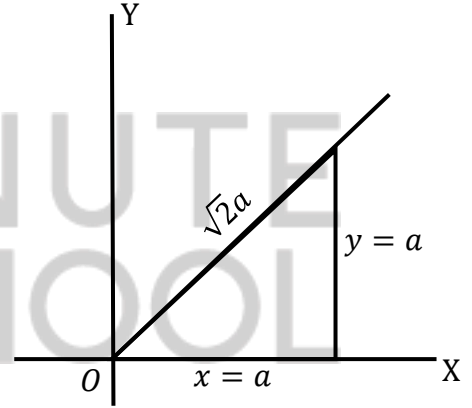
$\therefore \sin\frac{\pi}{4} = \frac{y}{r} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \cos\frac{\pi}{4} = \frac{x}{r} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \tan\frac{\pi}{4} = \frac{y}{x} = \frac{a}{a} = 1$

$\therefore \cot\frac{\pi}{4} = \frac{x}{y} = \frac{a}{a} = 1$

$\therefore \sec\frac{\pi}{4} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$

$\therefore cosec\frac{\pi}{4} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$

$\frac{\pi}{2}$ = 90° এবং 0° কোণের ত্রিকোণমিতেক অনুপাতসমূহের মান নির্ণয়ের জন্য আমরা ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংখ্যা ব্যবহার করব। এখানে উল্লেখ্য যে, শূন্য দ্বারা কোন কিছুকেই ভাগ করা যায় না বা শুন্য দ্বারা ভাগ গ্রহনযোগ্য নয় (Division by 0 is not allowed) অথবা শুন্য দ্বারা ভাগ অসংজ্ঞায়িত (Undefined)

Now Practice:

(1) $\frac{\pi}{2}$ (90°) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহ লিখ।

Ans:

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\tan\frac{\pi}{2} =$ অসংজ্ঞায়িত

$\cot\frac{\pi}{2} = 0$

$\sec\frac{\pi}{2} =$ অসংজ্ঞায়িত

$\mathrm{cosec}\frac{\pi}{2} = 1$

(i) 0,1,2,3 এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটি 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $sin0°$, $sin30°$, $sin45°$, $sin60°$ এবং $sin90°$ এর মান পাওয়া যায়।

(ii) 4,3,2,1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটি 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $cos0°$, $cos30°$, $cos45°$, $cos60°$ এবং $cos90°$ এর মান পাওয়া যায়।

অনুপাত/কোণ	$0° = \theta$	$\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$	$\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$	$\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$	$\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$
sine	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cotangent	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secant	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosecant	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :

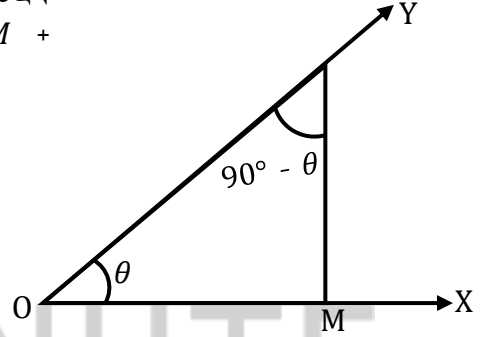
আমরা জানি যে, দুইটি সুক্ষ্মকোণের পরিমাপের সমষ্টি 90° হলে, তাদের একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলা হয়।

সাধারণভাবে θ ও $(90° - \theta)$ কোণ পরস্পরের পূরক কোণ।

মনেকরি, $\angle XOY = \theta$ এবং এই কোণে OY বাহুর উপর একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি।

যেহেতু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোন। অতএব POM সমকোণী ত্রিভুজে $\angle PMO = 90°$ এবং $\angle OPM + \angle POM$ = এক সমকোণ = 90°

$\angle OPM = 90° - \angle POM = 90° - \theta$

$[\angle POM = \angle XOY = \theta]$

$\therefore \sin(90° - \theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\angle POM = \cos\theta$

$\therefore \cos(90° - \theta) = \frac{PM}{OP} = \sin\angle POM = \sin\theta$

$\therefore \tan(90° - \theta) = \frac{OM}{PM} = \cot\angle POM = \cot\theta$

$\therefore \cot(90° - \theta) = \frac{PM}{OM} = tan\angle POM = \tan\theta$

$\therefore \sec(90° - \theta) = \frac{OP}{PM} = cosec\angle POM = cosec\theta$

$\therefore cosec(90° - \theta) = \frac{OP}{OM} = sec\angle POM = \sec\theta$

FORMULA

1. একটি কোণের ষাটমূলক পরিমাপ এবং বৃত্তীয় পরিমাপ যথাক্রমে D° এবং R^c হলে $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$

2. r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে θ কোণে খন্ডিত বৃত্ত চাপের দৈর্ঘ্য $S = r\theta$

সুক্ষকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মধ্যে সম্পর্ক :

(i) $sin\theta = \frac{1}{cosec\theta}$

(ii) $cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}$

(iii) $cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$

(iv) $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$

(v) $tan\theta = \frac{1}{cot\theta}$

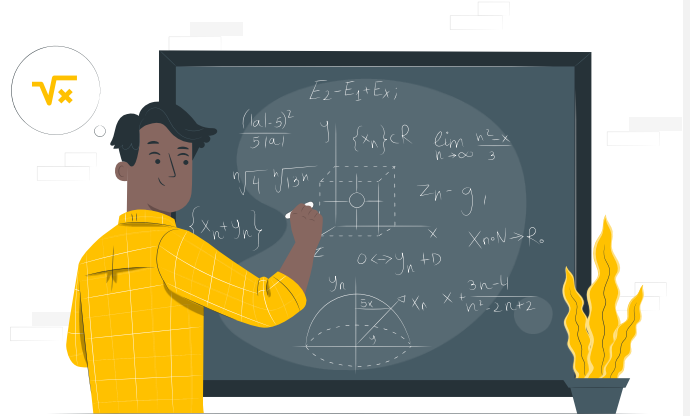
(vi) $cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$

(vii) $tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$

(viii) $cot\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta}$

(ix) $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

(x) $sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$

(xi) $cosec^2\theta = 1 + cot^2\theta$

Type-2

Model Example:

$tanA + sinA$ = m

$tanA - sinA$ = n হলে দেখাও যে $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

(উত্তর)

$tanA + sinA$ = m

$tanA - sinA$ = n

$\therefore\ m^2 - n^2 = (tanA + sinA)^2 - (tanA - sinA)^2$

$= 4tanAsinA\ \ [(m+n)^2 = (m-n)^2 - 4mn$

$= 4\sqrt{(tan^2Asin^2A)}$

$= 4\sqrt{tan^2A(1 - cos^2A)}$

$= 4\sqrt{tan^2A - tan^2Acos^2\theta}$

$= 4\sqrt{tan^2A - \frac{sin^2A}{cos^2A} \times cos^2A}$

$= 4\sqrt{tan^2A - sin^2A}$

$= 4\sqrt{(tanA + sinA)(tanA - sinA)}$

$= 4\sqrt{mn}$ [মান বসিয়ে]

(Showed)

Model Example:

প্রমাণ কর যে, $\frac{tanA}{1-cotA} + \frac{cotA}{1-tanA} = secAcosecA + 1$

L.H.S $= \frac{tanA}{1-cotA} + \frac{cotA}{1-tanA}$

$$= \frac{\frac{sinA}{cosA}}{1-\frac{cosA}{sinA}} + \frac{\frac{cosA}{sinA}}{1-\frac{sinA}{cosA}}$$

$$= \frac{\frac{sinA}{cosA}}{\frac{sinA-cosA}{sinA}} + \frac{\frac{cosA}{sinA}}{\frac{cosA-sinA}{cosA}}$$

$$= \frac{sinA}{cosA} \times \frac{sinA}{sinA-cosA} + \frac{cosA}{sinA} \times \frac{cosA}{cosA-sinA}$$

$$= \frac{sin^2A}{cosA(sinA-cosA)} + \frac{cos^2A}{sinA(cosA-sinA)}$$

$$= \frac{sin^2A}{cosA(sinA-cosA)} - \frac{cos^2A}{sinA(sinA-cosA)}$$

$$= \frac{sin^3A - cos^3A}{sinA\ cosA(sinA-cosA)}$$

$$= \frac{(sinA-cosA)(sin^2A+sinAcosA+cos^2A}{sinA\ cosA(sinA-cosA)}$$

$$= \frac{1+sinAcosA}{sinA\ cosA}$$

$$= \frac{1}{sinA\ cosA} + \frac{sinAcosA}{sinA\ cosA}$$

$= cosecAsecA + 1$

$= secAcosecA + 1$

= **R.H.S** **[Proved]**

Model Example:

প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{1-sinA}{1+sinA}} = secA - tanA$

L.H.S $= \sqrt{\frac{1-sinA}{1+sinA}}$

$= \sqrt{\frac{(1-sinA)(1-sinA)}{(1+sinA)(1-sinA)}}$ [লব ও হরকে $1 - sinA$ দ্বারা গুণ করে]

$= \sqrt{\frac{(1-sinA)^2}{1-sin^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{1-sin^2 A}{cos^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{(1-sinA)(1-sinA)}{(1+sinA)(1-sinA)}}$

$= \sqrt{\frac{(1-sinA)^2}{\cos^2 A}}$

$= \frac{1-sinA}{cosA}$

$= \frac{1}{cosA} - \frac{sinA}{cosA}$

$= secA - tanA$

= **R.H.S**

[Proved]

Model Example:

$cosA + sinA = \sqrt{2}\ cosA$ হলে প্রমাণ কর যে, $cosA - sinA = \sqrt{2} sinA$

উত্তর :

দেওয়া আছে,

$cosA + sinA = \sqrt{2}\ cosA$

বা, $sinA = \sqrt{2}\ cosA - cosA$

বা, $sinA = (\sqrt{2} - 1)\ cosA$

বা, $sinA\ (\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} - 1)\ (\sqrt{2} + 1)\ cosA$ উভয়পক্ষে $(\sqrt{2} + 1)$ দ্বারা গুণ

বা, $sinA\ (\sqrt{2} + 1) = (2 - 1)\ cosA$

বা, $\sqrt{2}\ sinA + sinA = cosA$

বা, $\sqrt{2}\ sinA = cosA - sinA$

$\therefore cosA - sinA = \sqrt{2}\ sinA$

[Proved]

নিজে করো :

(ক) $p = 1 + \sin A$
$q = 1 - \sin A$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\sqrt{\frac{p}{q}} = \sec A + \tan A$$

(খ) $\frac{1}{1+\sin A} + \frac{1}{1-\sin A} = 2\sec^2 A$ [প্রমাণ কর]

(গ) $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \,.\, \tan B$ [প্রমাণ কর]

Type-3

Model Example:

$\cot A = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{a\sin A - b\cos A}{a\sin A + b\cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $\cot A = \frac{b}{a}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{a\sin A - b\cos A}{a\sin A + b\cos A}$

$= \frac{a\frac{\sin A}{\sin A} - b\frac{\cos A}{\sin A}}{a\frac{\sin A}{\sin A} + b\frac{\cos A}{\sin A}}$ [লব ও হরকে $\sin A$ দ্বারা ভাগ করে।]

$= \frac{a - b\cot A}{a + b\cot A}$ [$\because \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$]

$= \frac{a - b\frac{b}{a}}{a + b\frac{b}{a}}$

$= \frac{a - \frac{b^2}{a}}{a + \frac{b^2}{a}}$

$= \frac{a^2 - b^2}{a} \times \frac{a}{a^2 + b^2}$

$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

$\therefore \frac{a sinA - b cosA}{a sinA + b cosA} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

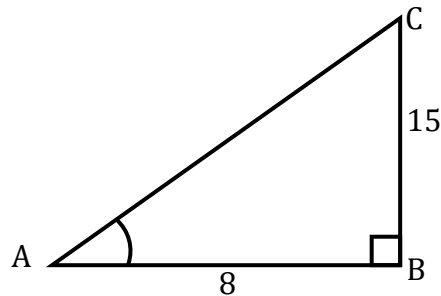
(Ans)

Model Example:

দেওয়া আছে, $15\cot A = 8$, $sinA$ ও $secA$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $15\cot A = 8$

বা, $\cot A = \frac{8}{15} = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}}$

$\therefore$ চিত্রানুসারে, A কোণের বিপরীত বাহু BC = 15; সন্নিহিত বাহু AB = 8

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

(অতিভুজ)^2 = (বিপরীত বাহু)^2 + (সন্নিহিত বাহু)^2

বা, $AC^2 = BC^2 + AB^2$

বা, $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2}$

বা, $AC = \sqrt{(15)^2 + 8^2}$

বা, $AC = 17$

$\therefore sinA = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{17}$

এবং, $secA = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{AC}{AB} = \frac{17}{8}$

Model Example:

$\frac{cos\theta - sin\theta}{cos\theta + sin\theta} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে,

$\frac{cos\theta - sin\theta}{cos\theta + sin\theta} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

বা, $\frac{cos\theta - sin\theta + (cos\theta + sin\theta)}{cos\theta - sin\theta - (cos\theta + sin\theta)} = \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{cos\theta - sin\theta + cos\theta + sin\theta}{cos\theta - sin\theta - cos\theta - sin\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$

বা, $\frac{2cos\theta}{-2sin\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$

বা, $\frac{cos\theta}{sin\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{cos\theta}{sin\theta} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

বা, $tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $tan\theta = tan30°$

$\therefore \theta = 30°$

(Ans)

নিজে করো :

(i) $cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii) ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle C$ সমকোণ, $tanB = \sqrt{3}$,∠B = p+q এবং $\angle A$ = p-q হলে p ও q এর মান নির্ণয় কর।

(iii) $2cos^2\theta$ - $3cos\theta$ +1 এ $\theta = 60°$ হলে রাশিটির মান নির্ণয় কর।

SOLVED CQ

সৃজনশীল-০১

$\sqrt{3}\tan(A-B) = 1$, $\sqrt{3}\tan(A+B) = 3$ এবং $cosec\theta.\cot\theta = 2\sqrt{3}$ যেখানে θ সূক্ষকোণ।

(ক) A + B এর মান কত?

(খ) A ও B সূক্ষকোণ হলে A ও B এর মান নির্ণয় কর।

(গ) θ এর মান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

১ নং প্রশ্নের উত্তর:

(ক) দেওয়া আছে, $\sqrt{3}\tan(A+B) = 3$

বা, $\tan(A+B) = \frac{3}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan(A+B) = \sqrt{3}$

বা, $\tan(A+B) = \tan 60°$

$\therefore \quad A+B = 60°$

(Ans)

(খ) "ক" থেকে পাই, $A+B = 60°$ ---------------- i

আবার, $\sqrt{3}\tan(A-B) = 1$

বা, $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan(A-B) = \tan 30°$

$\therefore \quad A-B = 30°$ ---------------- ii

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$A + B + A - B = 60° + 30°$

বা, $2A = 90°$

$\therefore \quad A = 45°$

আবার,

সমীকরণ (i) ও (ii) বিয়োগ করে পাই,

$A + B - A + B = 60° - 30°$

বা, $2B = 30°$

$\therefore \quad B = 15°$

$\therefore A = 45°, B = 15°$

(Ans)

(গ) দেওয়া আছে, $cosec\theta . \cot\theta = 2\sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{sin\theta} . \frac{\cos\theta}{sin\theta} = 2\sqrt{3}$

বা, $\frac{\cos\theta}{sin^2\theta} = 2\sqrt{3}$

বা, $\cos\theta = 2\sqrt{3}\ sin^2\theta$

বা, $\cos\theta = 2\sqrt{3}\ (1 - cos^2\theta)$

বা, $\cos\theta = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\ cos^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\ cos^2\theta + 4\cos\theta - 3\cos\theta - 2\sqrt{3} = 0$

বা, $2\cos\theta\ (\sqrt{3}\cos\theta + 2) - \sqrt{3}\ (\sqrt{3}\cos\theta + 2) = 0$

বা, $(\sqrt{3}\cos\theta + 2)\ (2\cos\theta - \sqrt{3}\ ) = 0$

$\therefore \sqrt{3}\cos\theta + 2 = 0$ বা, $2\cos\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\cos\theta = -2$ বা, $2\cos\theta = \sqrt{3}$

বা, $\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ বা, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos30°$

$\therefore \theta = 30°$

এখানে,

$\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ গ্রহণযোগ্য নহে। কারণ, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

$\therefore \theta = 30°$

আবার,

$cosec^2\theta - cot^2\theta$

$= cosec^2 30° - cot^2 30°$

$= (cosec30°)^2 - (cot30°)^2$

$= 2^2 - (\sqrt{3})^2$

$= 4 - 3$

$= 1$

$\therefore cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

(Showed)

সৃজনশীল-০২

tan$A$ + sin$A$ = m, এবং tan$A$ - sin$A$ = n.

(ক) প্রমাণ কর যে, $tan^2A.sin^2A$ = mn. [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৬]

(খ) দেখাও যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}.$

(গ) প্রমাণ কর যে, $secA = \sqrt{mn}\ cosec^2A$

২ নং প্রশ্নের উত্তর:

(ক) দেওয়া আছে,
tan$A$ + sin$A$ = m, এবং
tan$A$ - sin$A$ = n.

$$tan^2A.sin^2A = tan^2A\ (1 - cos^2A)\quad [\because sin^2\theta = 1 - cos^2\theta]$$
$$= tan^2A - tan^2Acos^2A$$
$$= tan^2A - \frac{sin^2A}{cos^2A}cos^2A\quad [\because tanA = \frac{sinA}{cosA}]$$
$$= tan^2A - sin^2A$$
$$= (tanA + sinA)\ (tanA - sinA)\qquad [\because a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)\ ]$$
$$= mn\quad \text{[মান বসিয়ে]}$$

$\therefore\ tan^2A.sin^2A = mn$ [প্রমাণিত]

(খ) দেওয়া আছে,
tan$A$ + sin$A$ = m, এবং
tan$A$ - sin$A$ = n.

'ক' থেকে পাই, $tan^2A.sin^2A = mn$

এখন,

$$m^2 - n^2 = (\tan A + \sin A)^2 - (\tan A - \sin A)^2$$

$= 4\tan A \cdot \sin A$ [∵ $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$]

$= 4\sqrt{tan^2A \cdot sin^2A}$

$= 4\sqrt{mn}$

∴ $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ [দেখানো হলো]

বিকল্প পদ্ধতি :

(খ) দেওয়া আছে,
$\tan A + \sin A = m$, এবং
$\tan A - \sin A = n$.

$m^2 - n^2 = (\tan A + \sin A)^2 - (\tan A - \sin A)^2$ [মান বসিয়ে]

$= 4\tan A \cdot \sin A$ [∵ $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$]

$= 4\sqrt{tan^2A \cdot sin^2A}$

$= 4\sqrt{tan^2A \cdot (1 - cos^2A)}$ [∵ $sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$]

$= 4\sqrt{tan^2A - tan^2A cos^2A}$

$= 4\sqrt{tan^2A - \frac{sin^2A}{cos^2A} cos^2A}$

$= 4\sqrt{tan^2A - sin^2A}$

$= 4\sqrt{(tanA + sinA)(tanA - sinA)}$ [∵ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$]

$= 4\sqrt{mn}$ [মান বসিয়ে]

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ।

∴ $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ [প্রমাণিত]

(গ) ‘ক’ থেকে পাই, $tan^2A.sin^2A \ = mn$

ডানপক্ষ,

$= \sqrt{mn}\ .\ cosec^2A$

$= \sqrt{tan^2A\ \ .\ sin^2A}\ .\ cosec^2A$ [মান বসিয়ে]

$= \sqrt{(tanA.sinA)^2}\ .\ cosec^2A$

$= \sqrt{(tanA.sinA)^2}\ .\ cosec^2A$

$= \ tanA.sinA\ .\ cosec^2A$

$= \frac{sinA}{cosA}.\ sinA.\frac{1}{sin^2A}$ [$\because cosecA = \frac{1}{sinA}$]

$= \frac{1}{cosA}$

$= \ secA$ [$\because secA = \frac{1}{cosA}$]

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ।

$\therefore\ secA = \sqrt{mn}\ .\ cosec^2A$ **[প্রমাণিত]**

সৃজনশীল-০৩

$cos^2\theta + cos^4\theta = 1$

(ক) দেখাও যে, $\frac{cos^2\theta}{1+cos^2\theta} = (1 + cos\theta)(1 - cos\theta)$

(খ) প্রমাণ কর যে, $cot^4\theta - cot^2\theta = 1$

(গ) দেখাও যে, $tan^4\theta + tan^2\theta = 1$ এবং $sin^2\theta + sin^2\theta = 1$

৩ নং প্রশ্নের উত্তর:

(ক) দেওয়া আছে,

$cos^2\theta + cos^4\theta = 1$

বা, $cos^2\theta = 1 - cos^4\theta$

এবং,

$\frac{cos^2\theta}{1+cos^2\theta} = \frac{1 - cos^4\theta}{1+cos^2\theta}$ $[\because cos^2\theta = 1 - cos^4\theta]$

$= \frac{1^2 - (cos^2\theta)^2}{1+cos^2\theta}$

$= \frac{(1+cos^2\theta)(1-cos^2\theta)}{1+cos^2\theta}$ $[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$= 1 - cos^2\theta$

$= (1 + cos\theta)(1 - cos\theta)$ $[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$\therefore \frac{cos^2\theta}{1+cos^2\theta} = (1 + cos\theta)(1 - cos\theta)$ [দেখানো হলো]

(খ) দেওয়া আছে,

$cos^2\theta + cos^4\theta = 1$

বা, $cos^4\theta = 1 - cos^2\theta$

বা, $cos^4\theta = sin^2\theta$ [∵ $1 - cos^2\theta = sin^2\theta$]

বা, $\frac{cos^4\theta}{sin^4\theta} = \frac{sin^2\theta}{sin^4\theta}$ [উভয়পক্ষে $sin^4\theta$ দ্বারা ভাগ করে।]

বা, $cot^4\theta = \frac{1}{sin^2\theta}$

বা, $cot^4\theta = cosec^2\theta$ [∵ $cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}$]

বা, $cot^4\theta = 1 + cot^2\theta$ [∵ $cosec^2\theta = 1 + cot^2\theta$]

∴ $cot^4\theta - cot^2\theta = 1$ **[প্রমাণিত]**

(গ) 'খ' হতে পাই,
$cot^4\theta - cot^2\theta = 1$

বা, $\frac{1}{tan^4\theta} - \frac{1}{tan^2\theta} = 1$ [∵ $cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$]

বা, $\frac{1 - tan^2\theta}{tan^4\theta} = 1$

বা, $tan^4\theta = 1 - tan^2\theta$

∴ $tan^4\theta + tan^2\theta = 1$ **[দেখানো হলো]**

আবার,
দেওয়া আছে,
$cos^4\theta + cos^2\theta = 1$

বা, $cos^4\theta = 1 - cos^2\theta$

বা, $cos^4\theta = sin^2\theta$ [∵ $1 - cos^2\theta = sin^2\theta$]

বা, $\frac{cos^4\theta}{cos^2\theta} = \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}$ [উভয়পক্ষে $cos^2\theta$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $cos^2\theta = tan^2\theta$ [$\because\ tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$]

বা, $1 - sin^2\theta = sec^2\theta - 1$ [$\because cos^2\theta = 1 - sin^2\theta$; $tan^2\theta = sec^2\theta - 1$]

বা, $1 + 1 - sin^2\theta = sec^2\theta$

বা, $1 + 1 = sec^2\theta + sin^2\theta$

$\therefore\ sec^2\theta + sin^2\theta = 2$ **[দেখানো হলো]**

সৃজনশীল-০৪

(ক) C কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো লিখ।

(খ) প্রদত্ত তথ্যের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{secA + 1}{secA - 1}} = cotA + cosecA$

(গ) $\frac{cot\theta + cot\alpha}{cot\theta - cot\alpha}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪ নং প্রশ্নের উত্তর:

(ক) যেহেতু, $sinA = \frac{3}{5} = \frac{BC}{AC}$ [$\because \theta = \angle DCA = \angle CAB$ একান্তর কোণ]

অর্থাৎ, BC = 3,
AC = 5

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

বা, $AB^2 = AC^2 - BC^2$

বা, $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$

বা, $AB = \sqrt{5^2 - 3^2}$

বা, $AB = \sqrt{25 - 9}$

বা, $AB = \sqrt{16}$

$\therefore AB = 4$

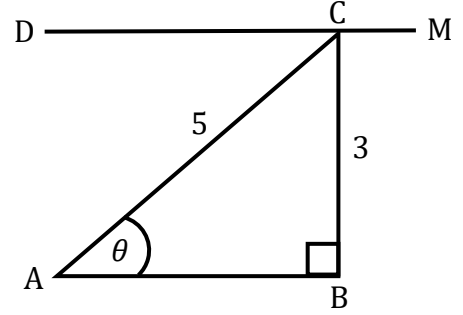
$\therefore sin\ C = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$

$cos\ C = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$

$tan\ C = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$

$cot\ C = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$

$sec\ C = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$

$cosec\ C = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$

(খ)

'ক' হতে প্রাপ্ত, AB = 4
BC = 3
এবং AC = 5

বামপক্ষ,

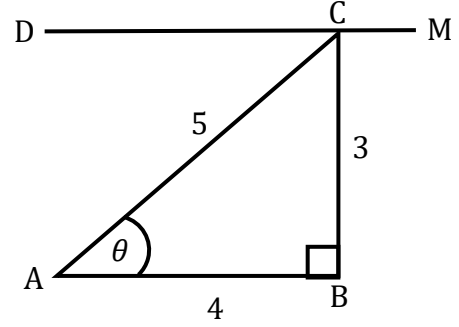
$= \sqrt{\frac{secA + 1}{secA - 1}}$

$= \sqrt{\frac{\frac{AC}{AB} + 1}{\frac{AC}{AB} - 1}}$

$= \sqrt{\frac{\frac{5}{4} + 1}{\frac{5}{4} - 1}}$

$= \sqrt{\frac{\frac{5+4}{4}}{\frac{5-4}{4}}}$

$= \sqrt{\frac{9}{4} \times \frac{4}{1}}$

$= 3$

ডানপক্ষ,

$= cot\ A\ + cosec\ A$

$= \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC}$

$= \frac{4}{3} + \frac{5}{3}$

$= \frac{4+5}{3} \quad = \frac{9}{3} \quad = 3$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\frac{secA + 1}{secA - 1}} = cot\ A\ + cosec\ A$ [প্রমাণিত]

(গ) DM ∥ AB হওয়ায়,
$\angle ACD = \angle CAB$
$\therefore \theta = \angle A$

তাহলে, $\cot\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$

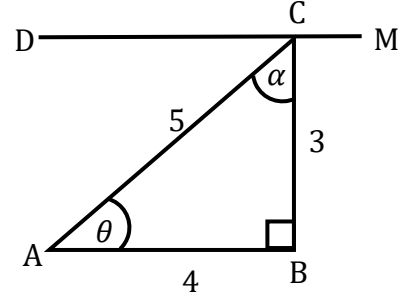
আবার, $\cot\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$

$$\therefore \frac{\cot\theta + \cot\alpha}{\cot\theta - \cot\alpha} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{16+9}{12}}{\frac{16-9}{12}}$$

$$= \frac{25}{12} \times \frac{12}{7}$$

$$= \frac{25}{7}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{25}{7}$ **[Ans.]**

SOLVED MCQ

(১) গ্রিক শব্দ 'metron' এর অর্থ কি ?

(ক) পরিসীমা (খ) পরিমিতি (গ) ✓ পরিমাপ (ঘ) ধার

(২) ত্রিকোণমিতি শব্দটি____________

(ক) ইংরেজি শব্দ (খ) পর্তুগীজ শব্দ (গ) ✓ গ্রিক শব্দ (ঘ) হিন্দি শব্দ

ব্যাখ্যা : Trigonometry শব্দটি গ্রিক শব্দ Tri,gon ও metron দ্বারা গঠিত।

(৩) কোনটি থেকে ত্রিকোণমিতির বিকাশ ঘটেছে ?

(ক) ✓ জ্যামিতি (খ) পাটিগণিত (গ) বীজগণিত (ঘ) পরিমিতি

ব্যাখ্যা : প্রাচীন যুগে জ্যামিতির ধারণা থেকে ত্রিকোণমিতির বিকাশ ঘটে।

(৪) ত্রিকোণমিতির উদ্ভব ঘটেছিল____________

(ক) প্রাচীন গ্রিসে (খ) ✓ প্রাচীন মিশরে (গ) প্রাচীন ব্যাবিলনে (ঘ) প্রাচীন ভারতে

ব্যাখ্যা : ত্রিকোণমিতির উদ্ভব ঘটেছিল প্রাচীন মিশরে।

(৫) সমকোণী ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু বা সমকোণের বিপরীত বাহুকে কি বলে ?

(ক) বিপরীত বাহু (খ) অতিভুজ ✓ (গ) সন্নিহিত বাহু (ঘ) কর্ণ

ব্যাখ্যা : সমকোণী ত্রিভুজের প্রদত্ত কোণের সরাসরি বিপরীত দিকের বাহুকে বিপরীত বাহু বলে। সমকোণের বিপরীত বাহুকে অতিভুজ বলে।

(৬) $1 + \frac{\sin^2 A}{1-\sin^2 A}$ = কত ?

(ক) $\sec^2 A$ ✓ (খ) $\cos^2 A$ (গ) $\sin^2 A$ (ঘ) $\mathrm{cosec}^2 A$

ব্যাখ্যা : $1 + \frac{\sin^2 A}{1-\sin^2 A} = 1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \frac{1}{\cos^2 A}$

$= \sec^2 A$

(৭) $sin^2A = \frac{1}{2}$ হলে $cos2A$ = কত ?

(ক) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) 1 (ঘ) 0

ব্যাখ্যা : $sin^2A = \frac{1}{2}$

বা, $2sin^2A = 1$

বা, $1 - 2sin^2A = 0$

বা, $1 - 2(1 - cos^2A) = 0$

বা, $1 - 2 + 2cos^2A = 0$

বা, $2cos^2A - 1 = 0$ [$\therefore cos2A = 2cos^2A - 1$]

বা, $cos2A = 0$ [$\therefore cos2A = 2cos^2A - 1$]

(৮) $\triangle ABC$ এর $\angle B = 90°$, AB = 3 সে.মি. , BC = 4সে.মি. হলে $sinC$ এর মান কত ?

(ক) $\frac{5}{3}$ (খ) $\frac{4}{5}$ (গ) $\frac{3}{4}$ (ঘ) $\frac{3}{5}$

ব্যাখ্যা : পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 3^2 + 4^2$

$= 9 + 16$

$= 25$

$\therefore AC = 5$

$\therefore sinC = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$

(৯) $\frac{sin\theta}{\sqrt{sin^2\theta+cos^2\theta}}$ = কত ?

(ক) $cot\theta$ (খ) $tan\theta$ (গ) $cos\theta$ (ঘ) $sin\theta$ ✓

ব্যাখ্যা :

$\frac{sin\theta}{\sqrt{sin^2\theta+cos^2\theta}} = \frac{sin\theta}{\sqrt{1}}$ $[\therefore\ sin^2\theta + cos^2\theta = 1]$

$= sin\theta$

(১০) $cos^2\theta - sin^2\theta = \frac{1}{3}$ হলে $cos^4\theta - sin^4\theta$ = কত ?

(ক) 1 (খ) $\frac{1}{3}$ ✓ (গ) 3 (ঘ) 2

ব্যাখ্যা :

$cos^4\theta - sin^4\theta = (cos^2\theta)^2 - (sin^2\theta)^4$

$= (cos^2\theta + sin^2\theta)\ (cos^2\theta - sin^2\theta)$

$= 1 \times \frac{1}{3}$

$= 1 \times \frac{1}{3}$

(১১) $cosec\theta = \frac{a}{b}$ হলে $tan\theta$ এর মান কত ?

(ক) $\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$ ✓ (খ) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (গ) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ (ঘ) $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ব্যাখ্যা : $cosec\theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

(অতিভুজ)^2 = লম্ব^2 + ভূমি^{2}

বা, (ভূমি)^2 = (অতিভুজ)^2 - (লম্ব)^2

বা, ভূমি = $\sqrt{(\text{অতিভুজ})^2 - (\text{লম্ব})^2}$

বা, ভূমি = $\sqrt{(a)^2 - (b)^2}$

$\therefore$ $tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

(১২) $\theta = 60°$ হলে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) $sin^2\theta - cos^2\theta = 1$

(খ) $sec^2\theta + tan^2\theta = 1$

(গ) $cot^2\theta - cosec^2\theta = 1$

(ঘ) $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$ ✔

ব্যাখ্যা :

(i) $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

(ii) $sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$

বা, $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$

(iii) $cosec^2\theta = 1 + cot^2\theta$

বা, $cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

(iv) $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$

বা, $cosec^2 60° - cot^2 60° = 1$

(১৩) $4sinA = 3$ হলে $tanA$ = কত ?

(ক) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (খ) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (গ) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ (ঘ) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ ✔

ব্যাখ্যা :

$4sinA = 3$ হলে $tanA$ = কত ?

বা, $sinA = \frac{3}{4} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$(\text{অতিভুজ})^2 = \text{লম্ব}^2 + \text{ভূমি}^2$

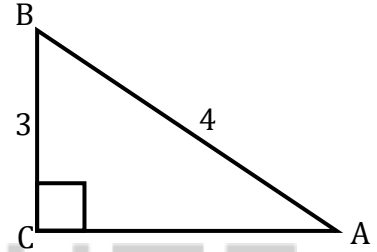
$4^2 = 3^2 + \text{ভূমি}^2$

বা, ভূমি $= \sqrt{16 - 9}$

$\therefore tanA = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

(১৪) θ সুক্ষ্মকোণ হলে ________

(i) $sin\theta + cos\theta < 1$ হবে

(ii) $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ হবে

(iii) $cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$ হবে

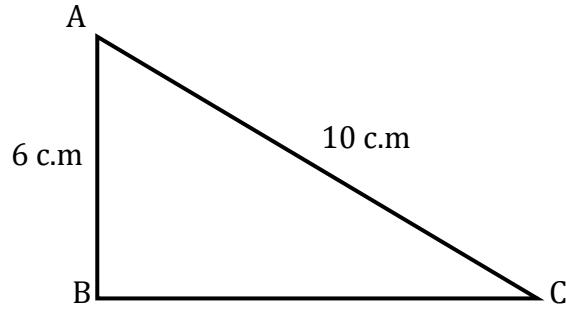
নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii ✔ (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও ii

ব্যাখ্যা :

i নং সূত্র নয় কারণ θ সুক্ষ্মকোণের জন্য $sin\theta + cos\theta \geq 1$

ত্রিকোণমিতির অভেদ অনুসারে, $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$; $cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

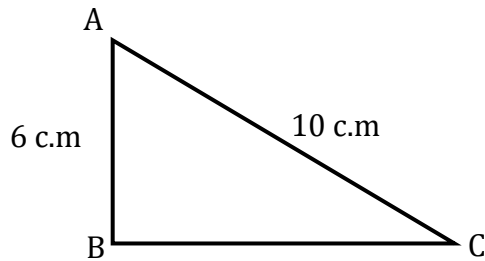
(১৫)

উপরের চিত্রে ΔABC এর ____________

(i) ক্ষেত্রফল 24 বর্গসে.মি.

(ii) পরিসীমা 60 সে.মি.

(iii) $\angle BAC > \angle ACB$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও iii (খ) i ও ii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও ii

ব্যাখ্যা :

ΔABC তে, পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $BC^2 = AC^2 - AB^2$

বা, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

ব্যাখ্যা :

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 8 \times 6$

$= 24$ বর্গসে.মি.

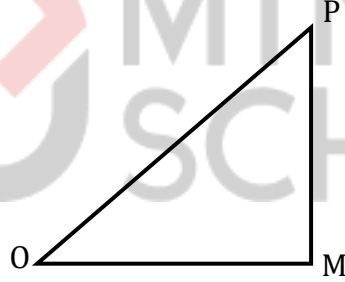
$\therefore$ পরিসীমা $= (AB + BC + AC)$cm

$= (6 + 8 + 10)$cm

$= 24$ cm

ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতম। এখানে, ABC ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম বাহু AB এবং এর বিপরীত কোণ $\angle ACB$; শর্তানুসারে, $\angle ACB$ ক্ষুদ্রতম কোণ। অর্থাৎ, $\angle ACB$ ত্রিভুজের অন্য যেকোনো কোণের তুলনায় ক্ষুদ্রতর।

$\therefore \angle BAC > \angle ACB$

(১৬)

ΔPOM এর $\angle PMO = 90°$ উপরের তথ্য ও আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

(i) $\frac{PM}{OP} < 1$

(ii) $\frac{OM}{OP} < 1$

(iii) $\frac{PM}{OP} > 1$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও ii

ব্যাখ্যা : প্রশ্নের চিত্রমতে, $\angle PMO = 90°$ তাই PMO সমকোণী ত্রিভুজ। অতিভুজ OP. OP বৃহত্তম বাহু হওয়ায় OP অপেক্ষা অন্য বাহুদ্বয় অবশ্যই ক্ষুদ্রতম হবে।

$\therefore \frac{PM}{OP} < 1$ এবং $\frac{OM}{OP} < 1$ সত্য। কিন্তু, $\frac{PM}{OP} \ngtr 1$

❑ $sin^2A + sin^4A = 1$

(১৭) $cos^2A = ?$

(ক) $sinA$ (খ) sin^2A (গ) sin^3A (ঘ) sin^4A ✓

ব্যাখ্যা :

দেয়া আছে,

$sin^2A + sin^4A = 1$

বা, $sin^4A = 1 - sin^2A$

বা, $sin^4A = cos^2A$

আবার,

$cos^2A = sin^4A$

বা, $\frac{cos^2A}{sin^2A} = \frac{sin^4A}{sin^2A}$

বা, $cot^2A = sin^2A$

বা, $sin^2A = cot^2A$

(১৮) $sin^2A = ?$

(ক) cot^2A (খ) $sinA$ (গ) cos^2A (ঘ) cos^4A

ব্যাখ্যা :

দেয়া আছে,

$sin^2A + sin^4A = 1$

বা, $sin^4A = 1 - sin^2A$

বা, $sin^4A = cos^2A$

বা, $\frac{sin^4A}{sin^2A} = \frac{cos^2A}{sin^2A}$

বা, $sin^2A = cot^2A$

(১৯) $(sin^2A + \sin A)^2 + (sin^2A - \sin A)^2 = ?$

(ক) 1 (খ) 2 (গ) 3 (ঘ) 4

ব্যাখ্যা :

$(sin^2A + \sin A)^2 + (sin^2A - \sin A)^2$

$= (sin^2A)^2 + 2.\ sin^2A.\sin A + (sinA)^2 + (sin^2A)^2 - 2.\ sin^2A.\sin A + (sinA)^2$

$= sin^4A + 2.sin^3A + sin^2A + sin^4A - 2.sin^3A + sin^2A$

$= 2sin^4A + 2sin^2A$

$= 2(sin^4A + sin^2A)$

$= 2 \times 1$

$= 2$

❑ $cosecA + cotA = \frac{1}{2}$

(২০) $cosecA - cotA = ?$

(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) 1 (গ) $\frac{3}{2}$ (ঘ) 2 ✓

ব্যাখ্যা :

দেয়া আছে,

$cosec^2A - cot^2A = 1$

বা, $(cosecA + cotA)(cosecA - cotA) = 1$

বা, $\frac{1}{2}(cosecA - cotA) = 1$

বা, $cosecA - cotA = 2$

(২১) $cosecA = ?$

(ক) $\frac{2}{3}$ (খ) $\frac{5}{4}$ ✓ (গ) $\frac{3}{2}$ (ঘ) 2

ব্যাখ্যা :

দেয়া আছে,

$cosecA + cotA = \frac{1}{2}$

বা, $cosecA + \sqrt{cosec^2A - 1} = \frac{1}{2}$ $[\because cosec^2A - cot^2A = 1]$

বা, $\sqrt{cosec^2A - 1} = \frac{1}{2} - cosecA$

বা, $cosec^2A - 1 = (\frac{1}{2} - cosecA)^2$

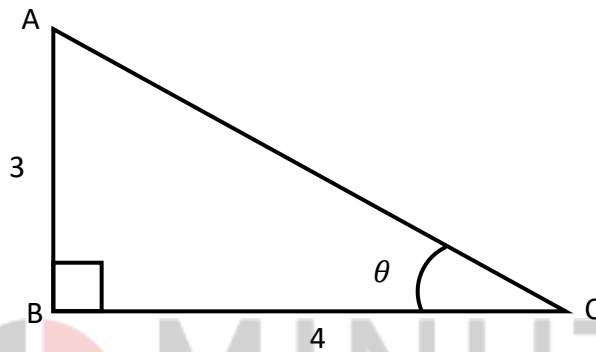
বা, $cosec^2A - 1 = (\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{2}cosecA + (cosecA)^2$

বা, $cosec^2A - 1 = \frac{1}{4} + cosec^2A - cosecA$

বা, $cosecA = \frac{1}{4} + 1 + cosec^2A - cosec^2A$

বা, $cosecA = \frac{1}{4} + 1$

$= \frac{5}{4}$

(২২)

$cos\theta$ এর মান কোনটি ?

(ক) $\frac{3}{5}$ (খ) $\frac{4}{5}$ (গ) $\frac{3}{4}$ (ঘ) $\frac{5}{4}$

ব্যাখ্যা :

প্রদত্ত চিত্র হতে,

$cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$

$= \frac{BC}{AC}$

$= \frac{4}{5}$

(২৩) $tan\theta + cot\theta - sec\theta = ?$

(ক) $\frac{5}{4}$ (খ) $\frac{5}{32}$ (গ) $\frac{25}{32}$ ✔(ঘ) $\frac{5}{6}$

ব্যাখ্যা :

$tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$

$cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

$sec\theta = \frac{1}{cot\theta} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{4}$

$\therefore tan\theta + cot\theta - sec\theta = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{9+16-15}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

 $\boldsymbol{tan^2\theta = 2}$

(২৪) $tan\theta$ এর মান কত ?

✔(ক) $\sqrt{2}$ (খ) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (গ) 2 (ঘ) $\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা :

দেওয়া আছে,

$tan^2\theta = 2$

বা, $tan\theta = \sqrt{2}$

(২৫) $sin\theta . sec\theta$ = কত ?

(ক) $\sqrt{2}$ (খ) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (গ) 2 (ঘ) $\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা :

দেওয়া আছে,

$tan^2\theta = 2$

বা, $(\frac{sin\theta}{cos\theta}) = \sqrt{2}$

বা, $sin\theta . \frac{1}{cos\theta} = \sqrt{2}$

বা, $sin\theta . sec\theta = \sqrt{2}$

অনু:(৯.২)

(১) $sin(90° - \theta)$ = ?

(ক) $cos\theta$ (খ) $sec\theta$ (গ) $cosec\theta$ (ঘ) $tan\theta$

ব্যাখ্যা :

θ ও $90° - \theta$ পরস্পর পূরক কোণ।

$sin(90° - \theta) = cos\theta$

90° এর বিজোড় গুণিতক বলে $sin\theta \rightarrow cos\theta$
জোড় হলে অপরিসীম থাকবে।

এখানে, $sin(90° - \theta) = sin(1 \times 90° - \theta) = cos\theta$

(২) $tan\,(90° - 30°) = ?$

(ক) $tan30°$ (খ) $cos30°$ (গ) $cot30°$ (ঘ) $sec30°$

ব্যাখ্যা :

$tan\,(90° - 30°) = tan\,60° = \sqrt{3}$

(i) $sin\,30° = \frac{1}{2}$ যা সঠিক নয়।

(ii) $cos\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ যা সঠিক নয়।

(iii) $cot\,30° = \sqrt{3}$ যা সঠিক।

(৩) $cot60°.\,tan0°.\,sec30°.\,cosec60° = ?$

(ক) 0 (খ) অসংজ্ঞায়িত (গ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ঘ) $\frac{4}{3}$

ব্যাখ্যা : $tan0° = 0$ যেকোনো সংখ্যা / রাশিকে 0 দিয়ে গুণ করলে গুণফল 0 হয়।

(৪) $cosec\theta = \sqrt{2}$ হলে, $\theta = ?$

(ক) 90° (খ) 60° (গ) 50° (ঘ) 45°

ব্যাখ্যা :

$cosec\theta = \sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{sin\theta} = \sqrt{2}$

বা, $sin\theta = sin45°$

বা, $\theta = 45°$

(৫) $\frac{1 - sin^2 45°}{1 + sin^2 45°} = ?$

(ক) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (খ) 2 (গ) $\frac{1}{3}$ ✔ (ঘ) 3

ব্যাখ্যা : $\frac{1 - sin^2 45°}{1 + sin^2 45°} = \frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{1 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2-1}{2}}{\frac{2+1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

(৬) $sin3A = cos3A$ হলে A = ?

(ক) 15° ✔ (খ) 20° (গ) 25° (ঘ) 30°

ব্যাখ্যা :

$sin3A = cos3A$ হলে A = ?

বা, $\frac{sin3A}{cos3A} = 1$

বা, $tan3A = 1$

বা, $tan3A = tan45°$

বা, $3A = 45°$

বা, $A = 15°$

(৭) $sin^2A = \frac{1}{2}$ হলে $cos2A$ = ?

(ক) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (খ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (গ) 1 (ঘ) 0 ✓

ব্যাখ্যা :

দেয়া আছে, $sin^2A = \frac{1}{2}$

বা, $sinA = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $sinA = sin45°$

বা, $A = 45°$

$\therefore cos2A = cos(2 \times 45°) = cos90° = 0$

(৮) $A = 15°$ হলে $cos^3 2A$ = ?

(ক) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ✓ (খ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (গ) $\frac{2\sqrt{3}}{4}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

ব্যাখ্যা :

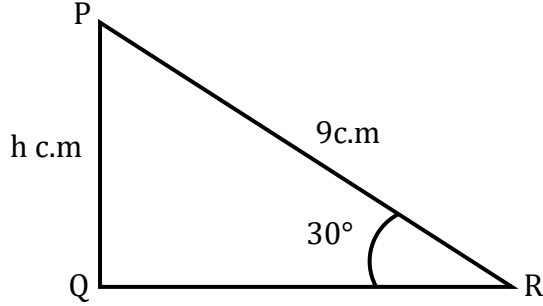
$A = 15°$

$\therefore cos^3 2A = cos^3(2 \times 15°)$

$= \{\cos(2 \times 15°)\}^3$

$= (\cos 30°)^3$

$= (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

(৯) নিচের চিত্রে h এর মান নিচের কোনটি ?

(ক) $4.5c.m.$ (খ) $6.3c.m.$ (গ) $7.8c.m.$ (ঘ) $9.5c.m.$

ব্যাখ্যা :

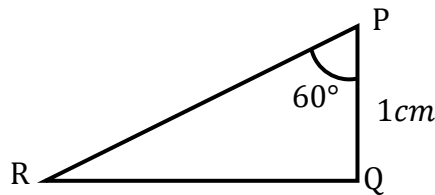
PQR সমকোণী ত্রিভুজে, $sin\angle PRQ = \frac{PQ}{PR}$ [$\because sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$]

বা, $sin30° = \frac{h}{9}$

বা, h = $sin30° \times 9$

বা, h = $\frac{1}{2} \times 9$

বা, h = 4.5 c.m.

(১০)

চিত্রে QR = ? c.m.

(ক) 1 (খ) $\sqrt{2}$ (গ) $\sqrt{3}$ (ঘ) 2

ব্যাখ্যা :

$tanP = \frac{QR}{PQ}$ [$\because tan\theta = \frac{লম্ব}{ভূমি}$]

বা, $tan60° = \frac{QR}{1}$

বা, $\sqrt{3} \times 1 = QR$

বা, $QR = \sqrt{3}$

(১১) $cos\frac{\pi}{4}sin\frac{\pi}{4}\ tan\frac{\pi}{4}$ এর মান কত ?

(ক) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (খ) $\frac{1}{2}$ ✓ (গ) 1 (ঘ) 2

ব্যাখ্যা : $cos\frac{\pi}{4}sin\frac{\pi}{4}\ tan\frac{\pi}{4} = cos45°sin45°tan45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}.1 = \frac{1}{2}$

(১২) $A = 60°$ $cos2A$ এর মান কত ?

(ক) $-\frac{1}{2}$ ✓ (খ) $\sqrt{3}$ (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ব্যাখ্যা :

$A = 60°$

$\therefore cos2A = \cos(2 \times 60°) = \cos(120°) = \cos(90° + 30°)$

$= -sin30°$ [$\because$ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে cos ঋণাত্মক।]

$= -\frac{1}{2}$

(১৩) $sin\theta + cos\theta = 1$ হলে, $sin\theta . cos\theta = ?$

(ক) 0 (খ) -1 (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) 1

ব্যাখ্যা :

$sin\theta + cos\theta = 1$ হলে, $sin\theta . cos\theta = ?$

বা, $(sin\theta + cos\theta)^2 = 1^2$

বা, $(sin\theta)^2 + 2. sin\theta . cos\theta + (cos\theta)^2 = 1$

বা, $sin^2\theta + cos^2\theta + 2. sin\theta . cos\theta = 1$

বা, $1 + 2sin\theta . cos\theta = 1$

বা, $sin\theta . cos\theta = \frac{(1-1)}{2}$

বা, $sin\theta . cos\theta = 0$

(১৪) $sin^2 37° + cos^2 37° = ?$

(ক) 5 (খ) 4 (গ) 3.5 (ঘ) 1

ব্যাখ্যা :

আমরা জানি, $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

θ এর মান সমান হলে $sin^2\theta + cos^2\theta$ এর সমষ্টি 1

$\therefore sin^2 37° + cos^2 37° = 1$

(১৫) $\theta = 0°$ কোণের ক্ষেত্রে____________

(i) $cosec\theta$ ও $cot\theta$ এর মান অসংজ্ঞায়িত।

(ii) প্রান্তীয় বাহু ও আদিবাহু একই রশ্মি।

(iii) $sec\theta$ ও $tan\theta$ এর মান অসংজ্ঞায়িত।

(ক) i ও ii ✓ (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও ii

ব্যাখ্যা :

$\theta = 0°$ হলে, $cosec0° = \frac{1}{sin0°} = \frac{1}{0}$ = অসংজ্ঞায়িত।

$cot0° = \frac{1}{tan0°} = \frac{1}{0}$ = অসংজ্ঞায়িত।

$sec0° = \frac{1}{cos0°} = \frac{1}{1}$ = যা সংজ্ঞায়িত।

$tan0° = \frac{sin0°}{cos0°} = \frac{0}{1}$ = যা সংজ্ঞায়িত।

$\theta = 0°$ কোণের ক্ষেত্রে প্রান্তীয় ও আদি বাহু একই রশ্মি ধরা হয়।

(১৬) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ক্ষেত্রে;

(i) $sin60° = \frac{1}{cos60°}$

(ii) $tan45° = \frac{1}{sin90°}$

(iii) $cosec30° = \frac{1}{cos60°}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii ✓ (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও ii

ব্যাখ্যা :

(i) নং সত্য নয়, $sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ বা, $\frac{1}{cos60°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

(ii) নং সত্য কারণ, $tan45° = 1$ বা, $\frac{1}{sin90°} = \frac{1}{1} = 1$

(iii) নং সত্য কারণ, $cosec30° = \frac{1}{sin60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ বা, $\frac{1}{cos60°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

(১৭)

(i) $\sec(90° - \theta) = cosec\theta$

(ii) পূরক কোণের $sine$ = কোণের $cosine$

(iii) $tan0° = 0$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও ii

ব্যাখ্যা :

চতুর্ভাগ অনুযায়ী পরিবর্তন

(i) $\sec(90° - \theta) = \text{cosec } \theta$ কারণ, অনুপাতগুলো পরিবর্তিত হয়।
$sin\theta \leftrightarrows cos\theta$; $sec\theta \leftrightarrows cosec\theta$; $tan\theta \leftrightarrows cot\theta$ অনুসারে।

(ii) নং সত্য। কারণ, $sin30° = cos60° = \frac{1}{2}$; $sin45° = cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $sin90° = cos0° = 1$;

(iii) $tan0° = 0$

(১৮) নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর :

(i) $sin^2A + sinA = 1$ হলে $sinA - cos^2A = 0$

(ii) $sinA = \frac{1}{3}$ হলে, $sinA + cosecA = \frac{8}{3}$

(iii) $sec\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে।

নিচের কোনটি সঠিক ?

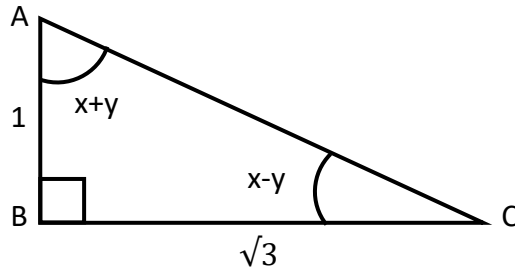
(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও ii

ব্যাখ্যা :

(i) দেয়া আছে,
$sin^2A + sinA = 1$
বা, $sinA = 1 - sin^2A$
বা, $sinA = cos^2A$
বা, $sinA - cos^2A = 0$

(ii) $sinA = \frac{1}{3}$ হলে, $sinA + cosecA = \frac{1}{3} + 3 = \frac{9+1}{3} = \frac{10}{3}$

(iii) $sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$
এখানে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু। তাই উক্ত ভগ্নাংশে সবসময় লব > হর হবে। সুতরাং, ভগ্নাংশটি 1 অপেক্ষা বড় হবে।

(১৯)

AC = ?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) $\sqrt{2}$ (ঘ) 2

ব্যাখ্যা :

পিথাগোরাসের উপপাদ্য মতে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $AC = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

(২০) x এর মান কত ?

(ক) $0°$ (খ) $15°$ (গ) $30°$ (ঘ) $45°$ ✔

ব্যাখ্যা :

$sinA = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin(x+y) = sin60°$

বা, $x + y = 60°$ ---------------- i

আবার,

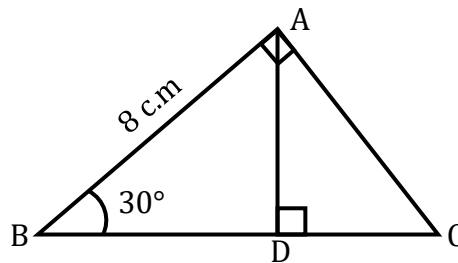
$sinC = \frac{1}{2}$

বা, $\sin(x - y) = sin30°$

বা, $x - y = 30°$ ---------------- ii

(i) ও (ii) যোগ করে পাই, $2x = 90°$

বা, $x = 45°$

❑

(২১) $sin\angle DAC = ?$

(ক) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ঘ) 1

ব্যাখ্যা :

ΔABC এর ক্ষেত্রে,

$\Delta ABC = \angle BAD + \angle DAC = 90°$

ΔABD এর ক্ষেত্রে,

$\angle ABD + \angle BAD + \angle ADB = 180°$

বা, $30° + \angle BAD + 90° = 180°$

বা, $\angle BAD = 180° - 120°$

বা, $\angle BAD = 60°$

$\therefore \angle DAC = 30°$

$\therefore sin\angle DAC = sin30° = \frac{1}{2}$

(২২) $AC = ?$

(ক) $8\sqrt{3}$ (খ) $\frac{16}{\sqrt{2}}$ (গ) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ (ঘ) 4

ব্যাখ্যা :

ΔABC এ $30°$ কোণের জন্য লম্ব = AC ও ভূমি = AB

$\therefore tan30° = \frac{AC}{AB}$ [$\because tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$]

বা, AC = AB $tan30°$

বা, AC = $8 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$

(২৩) $\frac{tan^2\theta+1}{sin^2\theta-1}$ এর মান নিচের কোনটি ?

(ক) $\frac{-35}{8}$ (খ) -2.44 (গ) -1 ✓ (ঘ) 1.56

ব্যাখ্যা :

চিত্র হতে,

$tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{3}{4}$ [$\because tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$]

$sin\theta = \frac{PQ}{PR} = \frac{3}{5}$ [$\because sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভূজ}}$]

$\therefore \frac{tan^2\theta+1}{sin^2\theta-1} = \frac{\frac{9}{16}+1}{\frac{9}{25}-1} = \frac{\frac{9+16}{16}}{\frac{9-25}{25}} = \frac{\frac{25}{16}}{\frac{-16}{25}} = \frac{25}{16} \times \frac{25}{-16} = -2.44$

❑ $cosecA - cot = \frac{4}{3}$

(২৪) $cosecA + cotA = ?$

(ক) $-\frac{1}{4}$ (খ) $-\frac{3}{4}$ (গ) $\frac{1}{4}$ (ঘ) $\frac{3}{4}$ ✓

ব্যাখ্যা :

$cosec^2A + cot^2A = 1$

বা, $(cosecA + cotA)(cosecA - cotA) = 1$

বা, $(cosecA + cotA).\frac{4}{3} = 1$

বা, $(cosecA + cotA) = \frac{3}{4}$

(২৫) $cosecA = ?$

(ক) $\frac{23}{24}$　(খ) $\frac{25}{24}$　(গ) $\frac{27}{24}$　(ঘ) $\frac{29}{24}$

ব্যাখ্যা :

$cosecA + cotA = \frac{3}{4}$

$cosecA - cotA = \frac{4}{3}$

(+) করে $2cosecA = \frac{3}{4} + \frac{4}{3}$

বা, $2cosecA = \frac{9+16}{12}$

বা, $2cosecA = \frac{25}{12}$

বা, $cosecA = \frac{25}{12\times 2} = \frac{25}{24}$